Teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti

Marko Sossich

Teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti

Marko Sossich

Institut za kozmologiju i filozofiju prirode;
Zavod za primijenjenu fiziku, Sveučilište u Zagrebu Fakultet elektrotehnike i računarstva
marko.sossich@icpn.hr

Sažetak

Razumijevanje prostora i vremena predstavlja jedan od ključnih konceptualnih problema u fizici, no ne samo u fizici nego i u spoznajnoj teoriji i filozofiji uopće. Stoga tumačenje prostora i vremena u modernoj fizici značajno doprinosi obogaćivanju tog pojma koji sada ima utočište i u prirodnim znanostima. Teorija relativnosti je baš teorija prostorvremena te je njezin dinamički konstituent upravo prostorvrijeme, dok je u ostalim teorijama prostorvrijeme samo pozornica u njihovom postavljanju. Kako je opća teorija relativnosti utemeljena na pojmovima zakrivljenosti prostorvremena, tako se može formulirati i teorija istovjetna općoj teoriji relativnosti koja je temeljena na torziji. Tu teoriju nazivamo Teleparalelnim ekvivalentom opće teorije relativnosti. Svakako je zanimljivo proučiti vezu između zakrivljenosti i torzije, te je takva teorija značajna jer može bolje uroniti u svijet teorija temeljenih na lokalnoj baždarnoj simetriji. Doduše, ona se mora pojmovno spustiti na tu nižu razinu, ali samo u službi toga kako bi mogla uzdignuti ostale teorije i približiti ih pojmovnom razumijevanju sličnome onom iz opće teorije relativnosti.

1 Teorije gravitacije temeljene na torziji

1.1 Uvod u Teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti i njezin odnos s općom teorijom relativnosti

U ranim danima opće teorije relativnosti, ubrzo nakon njezinog postavljanja, želja Alberta Einsteina je bila ići korak dalje i postaviti teoriju koja ujedinjuje gravitaciju i elektromagnetizam. Takva ujedinjena teorija bi bila temeljena na geometriji prostorvremena po uzoru na opću teoriju relativnosti. Međutim, osnovni dinamički entitet u općoj teoriji relativnosti bila je metrika prostorvremena, koju označavamo s $g_{\mu\nu}$, te ona sadrži 10 stupnjeva slobode zbog simetričnosti $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. S druge strane, Einstein u svojim radovima između 1928. i 1931. godine uvodi koncepte apsolutnog paralelizma ili teleparalelizma (njem. Fernparallelismus) [1] u kojima se spominje tetrada $h^a{}_\mu$. Nasuprot metrici, tetrada sadrži 16 stupnjeva slobode gdje bi dodatnih 6 stupnjeva slobode potencijalno moglo odgovarati elektromagnetizmu (3 električna polja i 3 magnetska polja). No, ubrzo nakon toga otkriveno je da tih dodatnih 6 stupnjeva slobode odgovaraju izboru Lorentzovog promatrača te je taj pristup napušten u okviru ujedinjenja gravitacije i teorije elektromagnetizma [2]. Ipak, ovaj rezultat doveo je do daljnjeg razumijevanja prostovremena, te se otvorila mogućnost formulacija istovjetnih teorija općoj teoriji relativnosti no korištenjem raznih koneksija.

Koneksije u teorijama gravitacije, no također i u baždarnim teorijama standardnog modela igraju ključnu ulogu u formulacijama tih teorija. Njih koristimo kao „pomoćno polje" koje nam služi u očuvanju kovarijantnosti lagranžijana zadanih teorija u odnosu na konkretnu transformaciju. Npr. u baždarnim teorijama standardnog modela javlja se Diracov lagranžijan

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi, \tag{1}$$

gdje je ψ Diracov spinor, m masa Diracovog spinora, γ^μ su matrice reprezentacije Diracovih spinora, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ je parcijalna derivacija po koordinati x^μ, a c brzina svjetlosti te $\hbar$ Planckova konstanta. Taj lagranžijan nije invarijantan s obzirom na lokalnu baždarnu transformaciju $\psi' = e^{i\lambda(x)}\psi$, odnosno njena derivacija narušava tu invarijantnost. U tu svrhu uvodimo kovarijantnu derivaciju

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \tag{2}$$

gdje je upravo A_μ koneksija u lokalno baždarnim teorijama. Konkretno, njezina algebra se poklapa s algebrom polja u teoriji elektromagnetizma, pa kažemo da polje A_μ predstavlja učinke elektromagnetizma u baždarnim teorijama. Na taj način lagranžijan (1) postaje lokalno baždarno invarijantan. Koneksije nisu tenzori jer se one za tu transformaciju transformiraju na način

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1} = A_\mu - \partial_\mu\lambda(x), \tag{3}$$

gdje je $U = e^{i\lambda(x)}$ zadana transformacija. Primijetimo da razlika dviju koneksija predstavlja tenzor, to vidimo u drugom članu $U\partial_\mu U^{-1}$ koji ovisi samo o transformaciji U te se u razlici poništava i ostaje

$$F'_\mu = UF_\mu U^{-1}, \tag{4}$$

što smatramo transformacijom koju zadovoljavaju tenzori. Na sličan način, za neku drugu transformaciju npr. $U = \lambda(x)_a{}^b$ tzv. lokalnu Lorentzovu transformaciju, također uvodimo koneksiju, i pripadni kovarijantnu derivaciju

$$\mathcal{D}_\mu x^a = \partial_\mu x^a + A^a{}_{b\nu} x^b, \tag{5}$$

koju zovemo Fock-Ivanenkovom kovarijantnom derivacijom, s pripadnom koneksijom $A^a{}_{b\nu}$ koju nazivano spinskom ili Lorentzovom koneksijom.

Konačno, u općoj teoriji relativnosti uvodimo kovarijantnu derivaciju s obzirom na simetriju tzv. opće kovarijantnosti (općenita transformacija koordinata)

$$\nabla_\mu x^\nu = \partial_\mu x^\nu + \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\rho\mu} x^\rho, \tag{6}$$

gdje je $\mathring{\Gamma}^\nu{}_{\rho\mu}$ koneksija Levi-Civite. Koneksija Levi-Civite predstavlja jedinstvenu koneksiju koja sadrži zakrivljenost i definirana je pomoću metrike

$$\mathring{\Gamma}^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \tag{7}$$

koja je simetrična na zamjenu dva donja indeksa $\mathring{\Gamma}^\sigma{}_{\nu\mu} = \mathring{\Gamma}^\sigma{}_{\mu\nu}$ te takva koneksija definira tenzor zakrivljenosti odnosno Riemannov tenzor

$$\mathring{R}^\rho{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\lambda\nu} + \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\sigma\nu} \mathring{\Gamma}^\sigma{}_{\lambda\mu} - \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\sigma\mu} \mathring{\Gamma}^\sigma{}_{\lambda\nu}. \tag{8}$$

Iz koneksije Levi-Civite slijedi važno svojstvo koje nazivamo metričnost

$$\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0. \tag{9}$$

Ubrzo nakon formulacije opće teorije relativnosti posebna pažnja bila je data poimanju prostovremena u terminima torzije. Poznato je da je u općoj teoriji relativnosti zakrivljenost osnovno ontološko načelo prostorvremena – matematički kažemo da je opća teorija relativnosti zasnovana na koneksijama $\mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho}$ koje sadrže zakrivljenost, a torzija iščezava. S druge strane moguće je formulirati istovjetnu teoriju u kojoj koristimo druge koneksije, a jedan od poznatijih primjera je upravo Teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti (TEGR). U takvoj teoriji koristimo koneksiju koja sadrži iščezavajuću zakrivljenost, a neiščezavajuću torziju, koju označavamo kao $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$, te ju često zovemo Weitzenböckovom koneksijom. Takva koneksija definira tenzor torzije

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}, \tag{10}$$

koja je dana antisimetričnim dijelom koneksije $\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}$. Primijetimo da koneksija Levi-Civite, koja je simetrična na zamjenu zadnja dva indeksa, daje iščezavajuću torziju, pa kažemo da koneksija Levi-Civite sadrži zakrivljenost ali ne i torziju. Formalno gledajući akcija opće teorije relativnosti je dana Einstein-Hilbertovom akcijom

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{c^4}{16\pi G}\int \sqrt{-g}Rd^4x, \tag{11}$$

gdje je R Riccijev skalar koji sadrži zakrivljenost i iščezavajuću torziju, a $g = \det(g_{\mu\nu})$ je determinanta metrike. S druge strane moguće je konstruirati akciju koja se temelji na torziji, a daje iste jednadžbe gibanja kao opća teorija relativnosti te ona glasi [3]

$$\mathcal{S}_{TEGR} = \frac{c^4}{16\pi G}\int hTd^4x, \tag{12}$$

gdje je T skalar torzije koji predstavlja učinke isključivo torzije, odnosno funkcija je isključivo Weitzenbökove koneksije $\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}$, a $h = \det(h_a{}^{\mu})$ je determinanta tetrade. Zapravo, moguće je konstruirati beskonačno mnogo teorija koje imaju iste jednadžbe gibanja kao i opća teorija relativnosti, a koje kombiniraju torziju i zakrivljenost. Razlog što su jednadžbe gibanja iste proizlazi iz konstrukcije skalara torzije za koji vrijedi

$$R = -T + \frac{2}{h}\partial_{\mu}(hT^{\mu}), \tag{13}$$

gdje je vidljivo da se Riccijev skalar R i skalar torzije T razlikuju do na potpunu divergenciju. Zbog tog svojstva poznato je da će dobivene jednadžbe gibanja ostati nepromijenjene do na član koji se nalazi u divergenciji.

1.2 Teorija gravitacije kao baždarna teorija

Postoji i drugi razlog zbog kojeg se uvode tetrade kao osnovni stupanj slobode u teorijama gravitacije. Takav objekt omogućuje konstrukciju lokalno baždarnih teorija gravitacije koje duguje svom lokalnom karakteru $h_a = h_a{}^{\mu}\partial_{\mu}$, budući da u svakoj točki prostorvremena razapinje četverodimanzionalni vektorski tangentni prostor. Želja da se teorija gravitacije formulira kao lokalno baždarna teorija proizlazi iz uspjeha kvantne teorije polja, odnosno standardnog modela, čije je osnovno načelo upravo lokalna baždarna simetrija. Konkretno TEGR smatramo baždarnom teorijom grupe translacija. Opću teoriju relativnosti ne smatramo baždarnom teorijom gravitacije po analogiji s baždarnim teorijama standardnog modela budući da je osnovni stupanj slobode metrika, a ona ne proizlazi iz nikakve baždarne simetrije kao koneksija te simetrije, ili jednostavno rečeno metrika nije koneksija. S druge strane, igrajući istu igru, pretpostavljamo da materija zadovoljava baždarnu simetriju translacije u tangentnom prostoru

$$x'^a = x^a + \varepsilon^a(x^\mu), \tag{14}$$

gdje su x^a koordinate u tangentnom prostoru, a ε parametar transformacije. Tada se infinitezimalna transformacija može napisati

$$x'^a = Ux^a = e^{\varepsilon^a P_a} x^a = (1 + \varepsilon^a P_a)x^a, \tag{15}$$

gdje su P_a generatori grupe translacija $P_a = \partial_a$. Koordinate se transformiraju

$$\delta x^a = x'^a - x^a = \varepsilon^b \partial_b x^a, \tag{16}$$

na isti način na koji se neko polje materije transformira, pa kažemo da je ono kovarijantno

$$\delta\phi = \varepsilon^b \partial_b \phi. \tag{17}$$

Međutim, derivacija polja se ne transformira kovarijantno te uvodimo koneksiju ${B^a}_\mu$ [4]. Primijetimo da vrijedi isto načelo kao i u slučaju elektromagnetskog vezanja sa spinorom, dakle iz lokalne baždarne invarijantosti Diracovog spinora nužno uvodimo koneksiju A_μ preko kovarijantne derivacije, upravo iz razloga što obična derivacija Diracovog spinora lomi lokalnu baždarnu simetriju. Tako i u TEGR uvodimo kovarijantnu derivaciju

$$D_\mu \phi = h_\mu \phi = \partial_\mu \phi + {B^a}_\mu \partial_a \phi, \tag{18}$$

koja omogućuje kovarijantnost

$$\delta(h_\mu \phi) = \varepsilon^b \partial_b (h_\mu \phi). \tag{19}$$

Poznato je da se koneksije u baždarnim teorijama transformiraju

$$B'_\mu = UB_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1} \implies {B'^a}_\mu = {B^a}_\mu - \partial_\mu \varepsilon^a. \tag{20}$$

Na taj način polje $B^a{}_\mu$ postaje koneksija u smislu lokalno baždarne simetrije, te ona istovremeno predstavlja gravitacijsko polje, gdje je vezanje dano kroz kovarijantu derivaciju, kao što je to slučaj i u Diracovoj teoriji vezanja s elektromagnetizmom. Konačno, polje $h^a{}_\mu$ i polje $B^a{}_\mu$ razlikuju se do na trivijalan član $\partial_a x^\mu$, te je trik u tome što je varijacija nekog lagranžijana ista provodi li se ona poljem $B^a{}_\mu$ ili $h^a{}_\mu$. S obzirom da je $h^a{}_\mu$ osnovni stupanj slobode teleparalelnih teorija gravitacije time je formalno postignut cilj postavljanja baždarne teorije gravitacije.

Primijetimo da je ovim trikom izmijenjena jedino formulacija teorija gravitacije, ali su jednadžbe gibanja ostale nepromijenjene. Cilj je dakle pojmovno približavanje teorije gravitacije standardnom modelu temeljenom na baždarnim simetrijama. Ovaj pristup je značajan, no treba ga promotriti i na obrnut način: s jedne strane postoji način kako se teorija gravitacije može razumjeti kao baždarna teorija, no s druge strane otvara se mogućnost da se teorije standardnog modela razumiju ili barem približe pojmovima opće teorije relativnosti. Time koneksije predstavljaju glavni predmet takve veze, te ih treba pobliže razumjeti u geometrijskom smislu kako bi se razumjela istinska priroda npr. elektromagnetizma. Slijedeći ove odnose, koji upućuju na vezu baždarnih teorija standardnog modela i opće teorije relativnosti, postavlja se pitanje fundamentalne uloge metrike u standardnom modelu, ili barem u elektromagnetizmu. Takva ideja vraća Einsteinovu želju o ujedinjenju gravitacije i elektromagnetizma u geometrijskom smislu. Time se dobiva puni smisao opće teorije relativnosti koja u sebi sadrži i gravitaciju i elektromagnetizam.

2 Kinematika čestice u teorijama temeljenima na torziji

Promotrimo kinematiku TEGR, odnosno gibanje testnog naboja (čestice). U općoj teoriji relativnosti gibanje čestice je opisano geodetskom jednadžbom kao ekstremalnom putanjom u nekom prostorvremenu, odnosno iščezavanjem kovarijantne četveroakceleracije

$$(\nabla_\mu u^\nu)u^\mu = \frac{d}{ds}u^\nu + \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\lambda\mu}u^\lambda u^\mu = 0. \tag{21}$$

Drugim riječima, u takvoj jednadžbi ne prepoznajemo silu, čestica se jednostavno slobodno giba, ali u zakrivljenom prostoru. To se načelo temelji na načelu jednakosti teške i trome mase, te bez tog načela ova interpretacija ne bi vrijedila. S druge strane testni naboj u TEGR se giba prema jednadžbi

$$(\nabla_\mu u^\nu)u^\mu = \frac{d}{ds}u^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}u^\lambda u^\mu = T^\nu{}_{\lambda\mu}u^\lambda u^\mu, \tag{22}$$

Ipak, postoji bitna razlika u interpretaciji jednadžbe (22) što ona nije geodetska jednadžba u „torzionom" prostoru. To je vidljivo iz toga što se na desnoj strani javlja tenzor $T^{\nu}{}_{\lambda\mu}$ koji predstavlja vanjsko polje koje efektivno prouzrokuje odstupanje od geodetske krivulje. Dakle, ovaj rezultat predstavlja važnu razliku TEGR i opće teorije relativnosti, gdje se u TEGR vraća pojam sile kao dinamičkog uzroka gibanja testne čestice, iako uzrok te sile nije klasično određen nabojem (masom). Uzrok je i dalje dan geometrijom prostorvremena u terminima torzije, no s obzirom na to da je globalna formulacija torzije dana u prostorvremenu Minkowskog tada nije neobično što jednadžba (22) poprima oblik u kojem djeluje polje torzije, zapravo kad bi to polje bilo nula tada bi se (22) svela na

$$\frac{d}{ds}u^{\nu} = 0, \tag{23}$$

jer bi u slučaju iščezavanja torzije iščeznula i koneksija $\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu}$, osim ako ona ne bi bila koneksija Levi-Civite koja po pretpostavci to nije. Dakle, iako jednadžba (22) nije geodetska po svojoj definiciji, ipak uzrokom gibanja čestice u gravitacijskom polju se i dalje pokazuje dinamika prostovremena u svakoj točki, no sada u terminima torzije. Zanimljivo je promotriti situaciju u kojoj postoji razlika trome i teške mase gdje m_i označava inercijalnu masu, a m_g tešku masu (naboj). Tada se jednadžba gibanja može napisati kao

$$\left(\partial x^a + \frac{m_g}{m_i}B^a_\mu\right)\frac{du_a}{ds} = \frac{m_g}{m_i}T^a{}_{\mu\rho}u_a u^\rho. \tag{24}$$

Poznato je da B^a_μ i $T^a{}_{\mu\rho}$ ne ovise o omjeru m_i/m_g te jednadžba gibanja čestice ostaje konzistentna i u slučaju $m_i \neq m_g$. U slučaju $m_i = m_g$ ona postaje istovjetna geodetskoj jednadžbi. Taj rezultat može se učiniti robusnijim od onoga u općoj teoriji relativnosti, no ipak treba biti vrlo oprezan s takvom tvrdnjom. Upravo zbog toga što u prirodi postoji jednakost trome i teške mase, iz toga slijedi geodetska jednadžba kao dublji princip, a ne naprosto kao neka slučajnost koja nastupa u TEGR. Ili preciznije, upravo zato što u mišljenju postoji opći zahtjev prema kojem se materija slobodno kreće u nekom prostorvremenu te bi putanja takve materije onda morala proizaći iz načela minimalne akcije, tada kao rezultat toga slijedi nužan zaključak o jednakosti teške i trome mase. S druge strane, (22) je ekvivalentna geodetskoj jednadžbi, što ne začuđuje jer je taj rezultat bio zahtjev teorije, jer je eksperimentalno potvrđena, te je ona tautološki i dobivena ali u terminima drugih veličina, odnosno polja. Tu prepoznajemo svojevrsan korak natrag u razumijevanju gravitacijskog međudjelovanja, gdje se vraća neko polje torzije kao uzrok međudjelovanja. Valja opet naglasiti da se upravo zbog tog vraćanja prevladanih pojmova omogućuje bolje shvaćanje tih pojmova u teorijama u kojima su oni i dalje aktualni. Iako je u standardnom modelu također prevladan pojam sile u klasičnom smislu, te međudjelovanje slijedi iz dubljeg principa baždarne simetrije, ipak i dalje ostaju pojmovi izmjene čestica, interakcije itd. Također, u teorijama standardnog modela ostaje enigma i nedovoljno razumljivo načelo lokalne baždarne simetrije. Doduše, velik iskorak je napravljen otkrićem i sistematizacijom pojma renormalizacije koji pretpostavlja beskonačnu vrijednost golih naboja i masa elementarnih čestica, te nekonstantnost tih veličina ovisi o energijskim skalama na kojoj se eksperiment odvija. Pokazano je da su sve teorije temeljene na baždarnoj simetriji renormalizabilne [5]. Problematičan je slučaj gravitacije koja se odupire toj tvrdnji, koji moramo shvatiti kao još jedan znak nedovoljnog razumijevanja odnosa baždarnih teorija i gravitacije.

3 Modificirane teorije gravitacije tipa $f(T)$ i Lorentzova simetrija

Vođeni novijim kozmološkim istraživanjima, te pokušajima postavljanja kvantne teorije gravitacije nameće se potreba za modifikacijom opće teorije relativnosti. Kako je bilo pokazano, stvar je konvencije uzimamo li teoriju temeljenoj na zakrivljenosti ili torziji, odnosno akcije (11) i (12) daju iste jednadžbe gibanja iako se te akcije razlikuju. Postoji čitava obitelj novih modificiranih teorija koje se temelje na zakrivljenosti i nazivamo ih $f(R)$ teorijama. Takve teorije mijenjaju akciju na način što linearnu funkciju Riccijevog skalara R zamjenjuju nekom općenitijom funkcijom $f(R)$ te akcija (11) postaje [6]

$$\mathcal{S}_{f(R)} = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x. \tag{25}$$

Na sličan način to možemo učiniti i s akcijom (12) gdje skalar torzije poopćujemo s općenitijom funkcijom $f(T)$ te akcija glasi [7]

$$\mathcal{S}_{f(T)} = \frac{c^4}{16\pi G} \int h f(T) d^4x. \tag{26}$$

Modificirane $f(T)$ teorije gravitacije su posebno zanimljive što daju jednadžbe gibanja najviše drugog reda u derivacijama komponenata metričkog tenzora, što je i slučaj u općoj teoriji relativnosti, dok u $f(R)$ teorijama one mogu biti čak i četvrtog reda. Takva jednostavnost je ubrzo pokazala svoju primjenu u kozmologiji gdje je na zadovoljavajući način riješen i model cikličkog svemira, inflacije, ubrzanog širenja itd [8, 9, 10, 11]. Međutim, ubrzo nakon postavljanja $f(T)$ teorije gravitacije uočen je problem narušenja lokalne Lorentzove simetrije [12, 13]. Naime, u ranijim teorijama uzet je uvjet tzv. apsolutne paralelizabilnosti slično kao (9) za koji kovarijantna derivacija tetrade iščezava

$$\nabla_\mu h^a{}_\nu = \partial_\mu h^a{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho = 0. \tag{27}$$

Taj uvjet definira Weitzenbökovu koneksiju

$$\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu. \tag{28}$$

A s druge strane tetrada $h^a{}_\mu$ mora zadovoljiti uvjet metričke kompatibilnosti

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu, \tag{29}$$

međutim, isto tako je moguće uzeti i neku drugu tetradu $h'^a{}_\mu$ te također mora vrijediti

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h'^a{}_\mu h'^b{}_\nu, \tag{30}$$

jer metrički tenzor jednoznačno definira geometriju prostorvremena. Kažemo da je tetrada lokalno Lorentz transformirana

$$h^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x) h'^b{}_\mu, \tag{31}$$

Međutim, sad vidimo da iz uvjeta apsolutne paralelizabilnosti dobivamo neku drugu Weitzenbökovu koneksiju za tu transformaciju

$$\Gamma'^\rho{}_{\nu\mu} = h'_a{}^\rho \partial_\mu h'^a{}_\nu, \tag{32}$$

a rekli smo da je akcija TEGR funkcija tenzora torzije odnosno Weitzenbökove koneksije. Na taj način vidljivo je da dobivamo drugi lagranžijan, pa je time narušena lokalna Lorentzova invarijantnost. U tu svrhu, kao što je i u prošlim poglavljima bio slučaj, uvodimo kovarijantnu derivaciju Fock-Ivanenka (5) koja uvodi i spinsku koneksiju u teoriju, pa je sada uvjet apsolutne paralelizabilnosti proširen

$$\partial_\mu h^a{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho + A^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu = 0, \tag{33}$$

gdje je uvedena i spinska koneksija $A^a{}_{b\mu}$. Vidimo da ako želimo imati istu koneksiju $\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$ za neku promijenjenu tetradu onda se mora i $A^a{}_{b\mu}$ mijenjati u skladu s tim kako bi $\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$ ostala nepromijenjena. Na taj način govorimo o kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ teorije gravitacije [14, 15]. Postavlja se pitanje kako prije nije bio uočen taj lom simetrije. Razlog tomu je sličan kao u slučaju odnosa R i T iz jednadžbe (13), spinska koneksija se javila samo kao član u potpunoj divergenciji. Međutim, kada T postaje općenitija funkcija onda član s potpunom divergencijom neće iščeznuti kao površinski član u lagranžijanu. Ipak, $f(T)$ teorija zapravo nije u potpunosti riješila problem lokalne Lorentzove invarijantnosti. Pri tome ostaju otvorena pitanja geometrija koje ovise i o prostoru i vremenu koja nisu na zadovoljavajući način riješena, kao i pitanja crnih rupa i vakuumskih rješenja koja pokazuju znatna pojmovna odstupanja od onih u općoj teoriji relativnosti.

Literatura

[1] Einstein, A., "Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparalle- lismus", Preussische Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, Sitzungsberichte, 1928, str. 217-221.

[2] Zakharov, A., Zinchuk, V., Pervushin, V., "Tetrad formalism and reference frames in ge- neral relativity", Physics of Particles and Nuclei, Vol. 37, 01 2006, str. 104-134.

[3] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, Teleparallel Gravity, vol. 173. Springer, Dordrecht, 2013.

[4] de Andrade, V. C., Pereira, J. G., "Gravitational lorentz force and the description of the gravitational interaction", Phys. Rev. D, Vol. 56, Oct 1997, str. 4689–4695.

[5] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, „Renormalization of Gauge Theories " Annals Phys. 98 (1976) 287-321

[6] H. A. Buchdahl, Mon. Not. R. Astron. Soc., 150, 1 (1970).

[7] Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis, and E. N. Saridakis, Rept. Prog. Phys. 79 no. 10, (2016) 106901, arXiv:1511.07586 [gr-qc].

[8] G. Farrugia, J. L. Said, and M. L. Ruggiero, Phys. Rev. D93 no. 10, (2016) 104034, arXiv:1605.07614 [gr-qc].

[9] L. Iorio, N. Radicella, and M. L. Ruggiero, JCAP 1508 no. 08, (2015) 021, arXiv:1505.06996 [gr-qc].

[10] Yi-Fu Cai, Shih-Hung Chen, James B. Dent, Sourish Dutta, Emmanuel N. Saridakis, Class. Quantum Grav. 28 (2011) 215011

[11] P. Pavlović, M. Sossich, „Dynamic properties of cyclic cosmologies", Phys.Rev.D 103 (2021) 2, 023529 arXiv:2009.03625 [gr-qc]

[12]] B. Li, T. P. Sotiriou, and J. D. Barrow, Phys. Rev. D83 (2011) 064035, arXiv:1010.1041 [gr-qc].

[13] T. P. Sotiriou, B. Li, and J. D. Barrow, Phys. Rev. D83 (2011) 104030, arXiv:1012.4039 [gr-qc].

[14] M. Krssak and E. N. Saridakis, Class. Quant. Grav. 33 no. 11, (2016) 115009, arXiv:1510.08432 [gr-qc].

[15] A. Golovnev, T. Koivisto, and M. Sandstad, Class. Quant. Grav. 34 no. 14, (2017) 145013, arXiv:1701.06271 [gr-qc].